www.sapientia.uji.es | 2



Matemáticas
Volumen I

Beatriz Campos Sancho
Joaquín Castelló Benavent

Matemáticas
Volumen I

Beatriz Campos Sancho
Joaquín Castelló Benavent



Diplomatura en Ciències Empresarials

- Codi assignatura C08
- Curs 2008/2009 1er semestre

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 1
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-691-4661-3



Índice general

.

TEMA 1

FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE REAL

1.1. CONCEPTOS BÁSICOS

Definición 1.1 Una *función real de una variable real* f es una aplicación de un subconjunto A de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Al conjunto A se le llama *dominio de definición* de la función o simplemente *dominio*.

Ejemplo 1.1 Sea f una función definida en el conjunto [0,1], que a todo elemento le hace corresponder su cuadrado:

$$\begin{array}{ccc} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \leadsto & 0 \\ \frac{1}{2} & \leadsto & \frac{1}{4} \\ 1 & \leadsto & 1 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Puesto que no podemos escribir las imágenes de los infinitos elementos, utilizaremos una ley matemática que nos indique cómo actúa la función. Así, en el ejemplo anterior tendremos:

$$f(x) = x^2$$

Por definición, cada elemento tiene una única imagen.

Ejemplo 1.2 Sea f la función que a todo elemento le hace corresponder su raíz cuadrada positiva:

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ 0 & \leadsto & 0 \\ \frac{1}{4} & \leadsto & \frac{1}{2} \\ 4 & \leadsto & 2 \\ \vdots & & \vdots \\ -4 & & \end{array}$$

Halla el dominio de f.

Solución. Vemos que la función $f(x) = \sqrt{x}$ no está definida para todos los números reales; por ejemplo, para el -4 no se tiene definida su imagen en $\mathbb{R}$. Nos preguntamos, por tanto, cuál es el dominio de definición de esta función. Puesto que la raíz cuadrada de un número x sólo existe si este número es mayor o igual que 0, es decir, si $x \geq 0$, tenemos que el dominio de esta función es el conjunto formado por todos los números reales positivos incluyendo el 0:

$$dom\,(f) = [0, +\infty[. \ \blacktriangle$$

Si dada una función f, no se especifica su dominio de definición, se sobreentiende que éste será el mayor subconjunto de $\mathbb{R}$ donde esté definida f.

Ejemplo 1.3 Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$, ¿cuál es su dominio?.

Solución. Observamos que todo elemento de $\mathbb{R}$ tiene inverso excepto el 0, ya que $\dfrac{1}{0}$ no existe, por tanto el dominio de f es:

$$dom\,(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

También podemos escribirlo en forma de intervalos:

$$dom\,(f) =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 1.4 La función $f(x) = x^2$ no es la misma que la función

$$\begin{array}{rcl} g : [0,1] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \rightsquigarrow & x^2 \end{array}$$

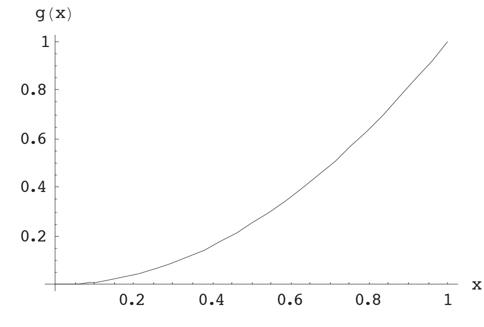
ya que el dominio de f es $\mathbb{R}$ mientras que el dominio de g es el intervalo [0,1].

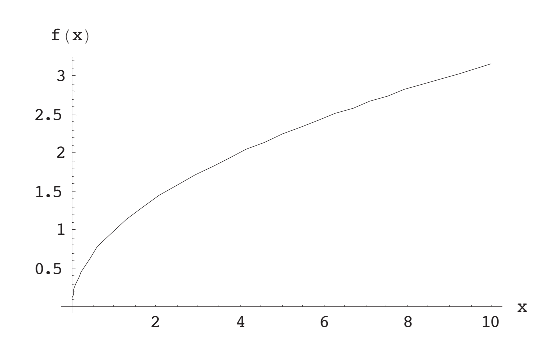
Definición 1.2 Se define la *gráfica* de una función real de una variable real como el conjunto:

$$Graf(f) = \{(x, f(x)) : x \in Dom f\}$$

Podemos observar que este conjunto se representa sobre el plano $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 1.5 a) La gráfica de la función $g : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$ es:





1.2. CÁLCULO DE DOMINIOS

Dada una función, no tiene sentido estudiarla allí donde no existe, es decir, donde no está definida. Por tanto, el primer paso de dicho estudio será calcular su dominio.

a) *Polinomios.*

Toda función polinómica

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_o$$

está definida para cualquier x de $\mathbb{R}$, por tanto su dominio es $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.6 Para la función $f(x) = 3x^2 - x + 1$ se tiene que

$$dom\,(f) = \mathbb{R}.$$

b) *Funciones racionales.*

Dada una función de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ polinomios, está definida en todos los números reales excepto en aquéllos que anulan al denominador, es decir, aquellos valores de x tales que $Q(x) = 0$.

Ejemplo 1.7 Halla el dominio de la función $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-5}$.

Solución. Buscamos los valores de x tales que $x - 5 = 0$, es decir, $x = 5$, por tanto el dominio es:

$$dom\,(f) = \mathbb{R} - \{5\}. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 1.8 Halla el dominio de la función $g(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

Solución. Buscamos aquellos valores de x tales que $x^2 - 3x + 2 = 0$, es decir, $x = 1$ y $x = 2$, por tanto el dominio es:

$$dom\,(g) = \mathbb{R} - \{1, 2\}. \ \blacktriangle$$

c) *Raíces de índice par.*

Cuando en una función aparezcan raíces de índice par, tendremos en cuenta que éstas sólo están definidas para valores del radicando no negativos, por tanto, el dominio estará formado por los puntos que hagan positivo o cero el radicando.

Ejemplo 1.9 Halla el dominio de la función $f(x) = \sqrt{x-2}$.

Solución. Buscamos aquellos valores de x tales que $x - 2 \geq 0$, *es decir,* $x \geq 2$, *por tanto el dominio es:*

$$dom\,(f) = [2, +\infty[. \ \blacktriangle$$

Ejemplo 1.10 Halla el dominio de la función $g(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$.

Solución. Buscamos los valores de x tales que el radicando sea no negativo, es decir, $x^2 + x - 2 \geq 0$. Para resolver esta inecuación, buscamos los valores de x tales que $x^2 + x - 2 = 0$, que son $x = 1$ y $x = -2$ y los representamos sobre la recta real.

Estos dos puntos dividen la recta real en tres subintervalos, calculando $x^2 + x - 2$ para un elemento cualquiera de cada uno de estos subintervalos, sabremos en cuál de ellos se verifica que $x^2 + x - 2 > 0$. Incluimos además los puntos $x = 1$ y $x = -2$ que es donde se anula el radicando. Por tanto el dominio es:

$$dom\,(g) =]-\infty - 2] \cup [1, +\infty[. \ \blacktriangle$$

d) *Logaritmos.*

La función logaritmo sólo está definida para valores positivos, por tanto, deberemos buscar aquellos valores para los cuales el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo.

Ejemplo 1.11 Halla el dominio de la función $f(x) = \ln(x - 5)$.

Solución. Buscamos los valores de x tales que $x - 5 > 0$, es decir, $x > 5$, por tanto el dominio es:

$$dom\,(g) =]5, +\infty[$$

El valor $x = 5$ queda excluido del intervalo ya que la condición para la existencia del logaritmo es que el argumento sea estrictamente positivo y en $x = 5$ éste toma el valor 0. ▲

Ejemplo 1.12 Halla el dominio de la función $g(x) = \ln(-x^2 + 4)$.

Solución. Buscamos los valores de x tales que $-x^2 + 4 > 0$. Para resolver esta inecuación, buscamos valores de x tales que $-x^2 + 4 = 0$, que son $x = 2$ y $x = -2$ y los representamos sobre la recta real.

Calculando $-x^2 + 4$ en algún punto de cada uno de los subintervalos en que ha quedado dividida la recta real, vemos que $-x^2 + 4 > 0$ entre -2 y 2. Por tanto el dominio es:

$$dom\,(g) =]-2, 2[. \ \blacktriangle$$

e) *Exponencial*

La función exponencial, $f(x) = e^x$, está definida para cualquier valor real. Por tanto, $dom\,(f) = \mathbb{R}$.

f) *Las funciones seno y coseno*

Las funciones seno y coseno, $f(x) = \sin x$ y $f(x) = \cos x$, están definidas para cualquier valor real, por tanto, $dom\,(f) = \mathbb{R}$.

g) *Funciones compuestas*

Cuando una función está formada por composición de varias funciones debemos tener en cuenta todas las restricciones estudiadas anteriormente.

Ejemplo 1.13 Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-4}$, halla su dominio.

Solución. Buscamos los valores de x tales que $x + 1 \geq 0$, es decir, buscamos valores tales que $x \geq -1$. Además, calculamos los valores de x que anulan al denominador para eliminarlos del dominio. Resolvemos $x^2 - 4 = 0$, cuya solución es $x = -2$ y $x = 2$, por tanto el dominio es:

$$Domg = [-1, +\infty[-\{2\}$$

o bien

$$Domg = [-1, 2[\cup]2, +\infty[. \ \blacktriangle$$

1.3. LÍMITES DE FUNCIONES

1.3.1. Límite de una función en un punto

En esta sección a y L representan números reales y f una función definida en un entorno de a, que puede no estar definida en a.

Límite finito. Límites laterales

Definición 1.3 Decimos que el *límite de* $f\,(x)$ *cuando* x *tiende a* a *es* igual a L, y lo escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ pueden aproximarse 'tanto como queramos' a L eligiendo un x suficientemente próximo a a.

Definición 1.4 Decimos que el límite de $f\,(x)$ cuando x tiende a a *por la izquierda* es igual a L (límite lateral por la izquierda), y lo escribimos

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ pueden aproximarse 'tanto como queramos' a L eligiendo un x suficientemente próximo a a y *menor* que a.

Definición 1.5 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a *por la derecha* es igual a L (límite lateral por la derecha), y lo escribimos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

si los valores de $f(x)$ pueden aproximarse 'tanto como queramos' a L eligiendo un x suficientemente próximo a a y *mayor* que a.

Propiedad 1 *El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a L si y sólo si existen los límites laterales por la izquierda y por la derecha y son iguales; es decir:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \qquad \textit{si y sólo si} \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Límites infinitos

Definición 1.6 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es *más infinito*, y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

si los valores que toma $f(x)$ cuando x se aproxima a a son arbitrariamente grandes; es decir, si al aproximarnos suficientemente a a podemos conseguir valores de $f(x)$ 'tan grandes como queramos'.

Definición 1.7 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es *menos infinito*, y escribimos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

si los valores que toma $f(x)$ cuando x se aproxima a a son arbitrariamente pequeños; es decir, si al aproximarnos suficientemente a a podemos conseguir valores de $f(x)$ 'tan pequeños como queramos'.

Cabe señalar que en los dos casos anteriores nos podemos aproximar a a por la izquierda o por la derecha; es decir, podemos tener:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty & \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty & \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \end{array}$$

Ejercicio 1.1 Escribe las definiciones correspondientes a los cuatro casos anteriores.

Definición 1.8 Cuando al menos uno de los límites laterales cuando x tiende a a es infinito, decimos que la recta $x = a$ es una *asíntota vertical* de la función $f(x)$.

Límites en el infinito

Definición 1.9 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es L, y escribimos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

si los valores que toma la función $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente grande se aproximan al valor L 'tanto como queramos'.

Definición 1.10 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es L, y escribimos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

si los valores que toma la función $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente pequeña se aproximan al valor L 'tanto como queramos'.

Definición 1.11 Decimos que la recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* por la izquierda (resp. derecha) si

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \quad (\text{resp. } \lim_{x\to+\infty} f(x) = L)$$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ y también $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ la recta $y = L$ recibe el nombre de *asíntota horitontal.*

Definición 1.12 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es más infinito, y escibimos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

si los valores que toma $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente grande son 'tan grandes como queramos'.

Definición 1.13 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es más infinito, y escribimos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

si los valores que toma $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente pequeña son 'tan grandes como queramos'.

Definición 1.14 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a más infinito es menos infinito, y escibimos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

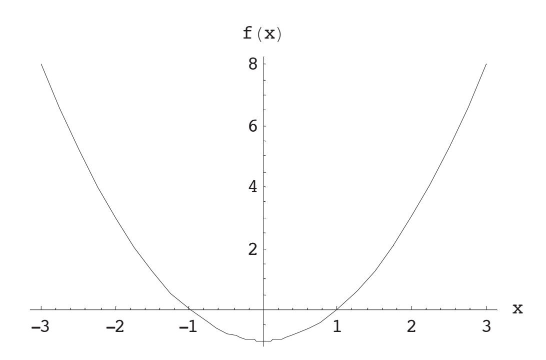
si los valores que toma $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente grande son 'tan pequeños como queramos'.

Definición 1.15 Decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a menos infinito es menos infinito, y escibimos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

si los valores que toma $f(x)$ cuando hacemos x arbitrariamente pequeña son 'tan pequeños como queramos'.

Ejemplo 1.14 La función $f(x) = x^2 - 1$ tiene $\lim_{x \to 2}(x^2 - 1) = 3$, como se deduce del dibujo, ya que los límites laterales son iguales a 3 cuando x tiende a 2, tanto por la derecha como por la izquierda.

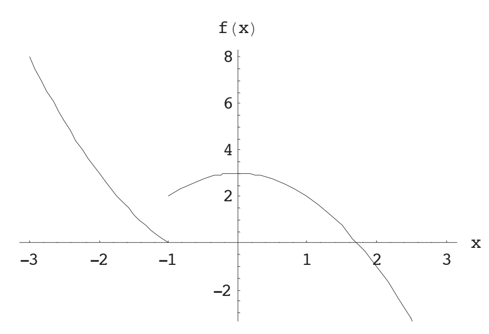


Ejemplo 1.15 La función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad x < -1 \\ 3 - x^2 & \text{si} \quad -1 \leq x \end{cases}$$

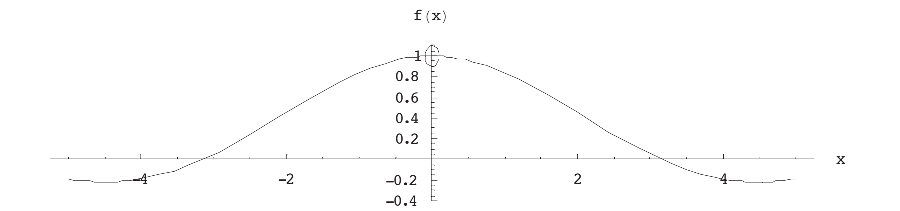
no tiene límite en $x = -1$, porque aunque tiene límites laterales, éstos no coinciden, ya que $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0$ mientras que $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 2$.

Además, esta función verifica $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



Una función puede tener límite en un punto aunque no esté definida en ese punto.

Ejemplo 1.16 La función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ no existe en $x = 0$ y sin embargo $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, como puede apreciarse en el siguiente dibujo, ya que los límites laterales son iguales a 1 en el punto $x = 0$.



Ejercicio 1.2 Comprueba con una calculadora que

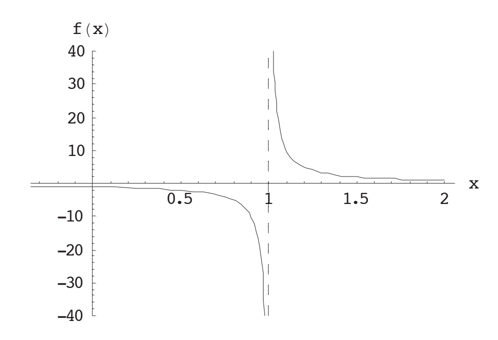
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Ejemplo 1.17 La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ porque

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$

Resulta, también, que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal, pues

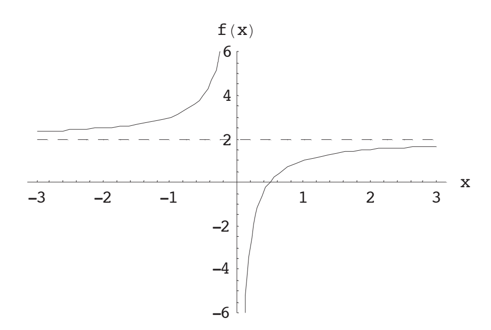
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0.$$



Ejemplo 1.18 La recta $y = 2$ es una asíntota horizontal de $f(x) = \frac{2x-1}{x}$, ya que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2 \textit{ y también } \lim_{x\to -\infty} f(x) = 2$$

Además, $x = 0$ es una asíntota vertical.



1.3.2. Propiedades de los límites

Supongamos que existen los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ y que $k \in \mathbb{R}$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

i) El límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia de límites:

$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

ii) El límite de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por el límite de la función:

$$\lim_{x\to a} kf(x) = k \lim_{x\to a} f(x)$$

iii) El límite de un producto es el producto de los límites de los factores:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

iv) El límite de un cociente es el cociente de los límites (siempre que el límite del denominador no sea 0).

$$\lim_{x\to a} g(x) \neq 0 \Rightarrow \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Aplicando las propiedades anteriores resulta fácil obtener los límites de algunas funciones elementales, así como deducir otros resultados importantes:

v) El límite de una potencia es la potencia del límite.

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \text{ con } n \text{ positivo y entero.}$$

vi) El límite de una función constante es la propia constante:

$$\lim_{x\to a} k = k$$

vii) El límite de la función identidad, $f(x) = x$, cuando x tiende a a es a:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

viii) El límite de la función $f(x) = x^n$ cuando x tiende a a es a^n:

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n, \text{ donde } n \text{ es positivo y entero.}$$

ix) El límite de la función raíz de índice n, $f(x) = \sqrt[n]{x}$, cuando x tiende a a es $\sqrt[n]{a}$ (si existe):

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}, \text{ donde } n \text{ es positivo y entero.}$$

x) El límite de una función polinómica $f(x)$ cuando x tiende a a es $f(a)$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

1.3.3. Cálculo de límites

En la sección anterior hemos visto propiedades que nos resultarán de mucha utilidad a la hora de calcular el límite de una gran cantidad de funciones. Sin embargo, esas propiedades sólo pueden aplicarse en el caso en que pretendamos calcular el límite de una función en un punto y bajo ciertas condiciones (por ejemplo, cuando calculemos el límite de un cociente, exigimos que el límite del denominador no sea 0).

Pero, ¿qué pasa, por ejemplo, cuando queremos calcular límites en el infinito? ¿Y cuando el límite de la función del denominador es 0? ¿Y cuando el límite de una función en un punto es infinito? En esta sección daremos respuesta a todas estas preguntas y a otras parecidas que se nos podrían ocurrir.

A continuación presentaremos una serie de tablas de doble entrada, donde aparecerán los casos que más comúnmente se presentan cuando calculamos límites. Con ellas, "aprenderemos" a efectuar cálculos con el infinito.

Cuando aparece la expresión IND en alguno de los lugares de las tablas, significa que tenemos una *indeterminación*; es decir, una expresión para la que no podemos prever el límite en función de los límites de las funciones que intervienen. Algunas se pueden resolver mediante manipulaciones algebraicas, mientras que para resolver otras, necesitaremos herramientas que quedan fuera del contenido y el propósito de este curso. Más adelante, veremos algunos ejemplos.

En las tres tablas que exponemos a continuación, aparece en la primera fila el $\lim_{x \to a} f(x)$ y en la primera columna el $\lim_{x \to a} g(x)$. En todos los casos, a puede ser un número real cualquiera, $+\infty$ ó $-\infty$. Las tres tablas también son válidas en el caso del cálculo de límites laterales.

- *Suma:* en la tabla aparece $\lim_{x \to a} (f(x) + g(x))$. Podemos resumirla diciendo que si a un infinito le sumamos cualquier número real, resulta un infinito del mismo signo que el que tenemos. Además, la suma de infinitos del mismo signo, es un infinito del mismo signo. La suma de infinitos de signo diferente (o la diferencia de infinitos del mismo signo) es una indeterminación. La representaremos $\infty - \infty$.

$+$	l_1	$+\infty$	$-\infty$
l_2	$l_1 + l_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

- *Producto:* en la tabla aparece $\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x))$. La resumimos diciendo que el resultado de multiplicar un número diferente de 0 por infinito es infinito, respetando la regla de los signos. Lo mismo, para el caso de

multiplicar dos infinitos. El producto de 0 por cualquier infinito, es una indeterminación. La representaremos $0 \cdot \infty$.

$\cdot$	$l_1 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 \neq 0$	$l_1 \cdot l_2$	0	∞	∞
0	0	0	IND	IND
$+\infty$	∞	IND	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	∞	IND	$-\infty$	$+\infty$

- *Cociente:* en la tabla aparece $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Aquí las indeterminaciones son $\dfrac{0}{0}$ y $\dfrac{\infty}{\infty}$. Excepto en esos casos, siempre que infinito aparece en el numerador, el resultado es infinito, del mismo modo que siempre que aparece 0 en el denominador (el signo depende tanto del signo del denominador como del signo del numerador, y habrá que determinarlo en cada caso particular). Inversamente, siempre que aparece 0 en el numerador o infinito en el denominador, el resultado es 0 (obviamente, exceptuando las indeterminaciones).

$\div$	$l_1 \neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
$l_2 \neq 0$	$\frac{l_1}{l_2}$	0	∞	∞
0	∞	IND	∞	∞
$+\infty$	0	0	IND	IND
$-\infty$	0	0	IND	IND

- *Potencia*: las indeterminaciones son 0^0, 1^∞ y $(+\infty)^0$. Para el resto de casos tenemos:

$$a^{+\infty} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad a > 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le a < 1 \end{cases} \qquad a^{-\infty} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a > 1 \\ +\infty & \text{si} \quad 0 \le a < 1 \end{cases}.$$

A continuación, veremos unos cuantos ejemplos que ilustrarán la resolución de algunas indeterminaciones.

· *Indeterminación del tipo* $\dfrac{0}{0}$ cuando calculamos el límite de una función racional. En este caso, factorizaremos los polinomios del numerador y denominador con el objetivo de eliminar los factores comunes.

Ejemplo 1.19 Calcula el $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x^2-1}$.

Solución. *Si sustituimos directamente, obtenemos la indeterminación* $\frac{0}{0}$. *Factorizando los polinomios, nos queda*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2+x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2+3x+4)}{(x-1)(x+1)}$$

Simplificando el factor $(x-1)$, *obtenemos*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+2x^2+x-4}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+3x+4}{x+1} = \frac{8}{2} = 4. \blacktriangle$$

· *Indeterminación del tipo* $\dfrac{\infty}{\infty}$ cuando calculamos el límite de una función racional. En este caso, tendremos en cuenta que, en el infinito, el límite de una función polinómica es el límite del monomio de mayor grado.

Ejemplo 1.20 Resuelve los siguientes límites:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3+5x-3}{-7x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3}{-7x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2}{7}x = -\infty.$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-x+1}{4x^2-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{4x^2} = \dfrac{3}{4}.$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-6x-7}{x^4-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2}{+\infty} = 0.$

· *Indeterminación del tipo* $\infty - \infty$. Suele aparecer cuando calculamos el límite de una diferencia de fracciones algebraicas y, normalmente, la resolveremos efectuando la diferencia y calculando el límite a continuación.

Ejemplo 1.21 Calcula el límite

$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3x-2}{x^2-4} \right)$$

Solución.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{3x-2}{x^2-4} \right) &= \lim_{x\to 2} \left(\frac{x+2}{x^2-4} - \frac{3x-2}{x^2-4} \right) = \lim_{x\to 2} \frac{-2x+4}{x^2-4} = \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x+2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}. \ \blacktriangle \end{aligned}$$

· *Indeterminación del tipo* 1^∞. Para resolver este tipo de indeterminación usaremos la fórmula de Euler: si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$, entonces

$$\lim_{x\to a} [f(x)]^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Ejemplo 1.22 Calcula el límite

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}}$$

Solución. Aplicando la fórmula de Euler se tiene

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{3x-1}{x+1} \right)^{\dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x-1}{x+1} -1 \right) \dfrac{x^2+1}{x^2-3x+2}}$$

Calculemos aparte el límite del exponente:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}-1\right)\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{x+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x-2)(x^2+1)}{(x+1)(x^2-3x+2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(x^2+1)}{(x+1)(x-2)}=-2$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x-1}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}.\ \blacktriangle$$

Ejercicio 1.3 Calcula el límite

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^{\frac{x^3+1}{5x^2-3x+2}}$$

1.4. CONTINUIDAD DE FUNCIONES

La idea intuitiva de función continua es la de una función tal que no hace falta levantar el lápiz del papel para dibujarla; es decir, que no se rompe. Formalicemos este concepto.

Definición 1.16 Una función f es *continua* en un punto a si

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

Ahora bien, esta condición es equivalente a les tres condiciones siguientes:

i) $\exists f(a)$; es decir, $a\in Dom(f)$.

ii) $\exists \lim_{x\to a^-} f(x)$, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x)$ y además $\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$.

iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Estas tres condiciones son las que suelen usarse en problemas prácticos.
Los valores de x donde f no es continua se llaman *discontinuidades*. Si f es continua para cualquier valor de x, decimos que f es continua.

Ejemplo 1.23 Estudia la continuidad, en el punto $x=2$, de la siguiente función :

$$f(x)=\begin{cases}3x & \text{si x} \le 2\\ x^2-1 & \text{si x} > 2\end{cases}$$

Solución. Veamos si se cumplen las 3 condiciones de continuidad en el punto $x=2$:

i) $f(2) = 3 \cdot 2 = 6$

ii) El límite por la izquierda de $x = 2$ es:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} 3x = 6$$

El límite por la derecha de $x = 2$ es:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(x^2 - 1\right) = 3$$

por tanto, no existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ ya que no coinciden los límites laterales.

Al no cumplirse la segunda condición podemos decir que $f(x)$ no es continua en $x = 2$. ▲

Ejemplo 1.24 Estudia la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si x} \leq 1 \\ 3 - x & \text{si x} > 1 \end{cases}$$

en el punto $x = 1$.

Solución. Veamos si se cumplen las 3 condiciones de continuidad en el punto $x = 1$:

i) $f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

ii) El límite por la izquierda de $x = 1$ es:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$$

El límite por la derecha de $x = 1$ es:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3 - x = 2$$

por tanto,

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

iii) $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$.

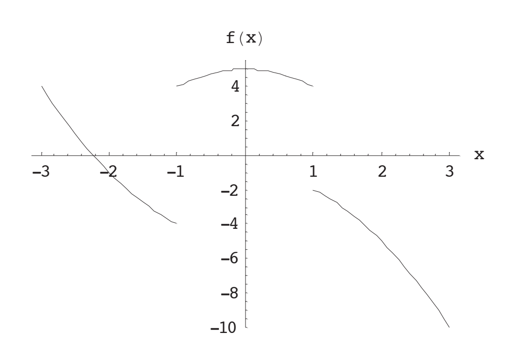
Por tanto, esta función sí es continua en el punto $x = 1$. ▲

Definición 1.17 Se dice que una función f es continua en un intervalo abierto $]a, b[$ cuando lo es en cada uno de sus puntos. Se dice que una función f es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ cuando lo es en cada punto interior y además:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \ \ y \ \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Notemos que decir que f es continua en un intervalo cerrado no implica que lo sea en sus extremos.

Ejemplo 1.25 La función f del siguiente dibujo es continua en el intervalo $[-1, 1]$. Pero no es continua en el intervalo $[0, 2]$ ya que es discontinua en el punto $x = 1$.



1.4.1. Álgebra de las funciones continuas

Veamos a continuación que ciertas operaciones entre funciones continuas mantienen la continuidad.

Si f y g son continuas en $x = a$, entonces:

- $f + g$ es continua en $x = a$.
- $k \cdot f$, $k \in \mathbb{R}$, es continua en $x = a$.
- $f \cdot g$ es continua en $x = a$.
- $\dfrac{f}{g}$ es continua en $x = a$ si y sólo si $g(a) \neq 0$.
- Regla de la cadena para funciones continuas: si f es continua en $x = a$ y g es continua en $f(a)$, entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en $x = a$.

1.4.2. Continuidad de las funciones elementales

Es evidente que es imposible estudiar la continuidad de una función en todos los puntos de un intervalo mediante la definición. Afortunadamente las funciones elementales son continuas en sus dominios de definición; es decir:

- Las funciones constantes son continuas en $\mathbb{R}$.
- Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$.
- Las funciones racionales son continuas en $\mathbb{R}$ excepto en los puntos que anulan el denominador.

- Las funciones potenciales de exponente racional r, $f(x) = x^r$, son continuas en todo su dominio.
- Las funciones exponenciales, $f(x) = a^x$, con $a \in \mathbb{R}^+$, son continuas en $\mathbb{R}$.
- Las funciones logarítmicas, $f(x) = \log_a x$, con $a \in \mathbb{R}^+$, son continuas en todo su dominio $\mathbb{R}^+$.
- Las funciones trigonométricas $f(x) = \sin x$ y $f(x) = \cos x$, son continuas en $\mathbb{R}$.

Ejemplo 1.26 a) La función $f(x) = 3\sin x + x^2 + 3$ es continua en $\mathbb{R}$ ya que es suma de funciones continuas en $\mathbb{R}$ pues la función $3\sin x$ es producto de un número real por una función continua en $\mathbb{R}$ y (x^2+3) es una función polinómica y por tanto continua en $\mathbb{R}$.

b) La función $f(x) = \frac{\cos x}{x-5}$ es continua en $\mathbb{R} - \{5\}$ ya que es cociente de funciones continuas y el denominador se anula en $x = 5$.

c) La función $f(x) = \tan x$ es continua en $\mathbb{R}$ excepto en los puntos que son múltiplos impares de $\frac{\pi}{2}$; es decir, los puntos $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, con $n \in \mathbb{Z}$ ya que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y esos son los puntos donde $\cos x$ vale 0.

1.5. DERIVABILIDAD DE FUNCIONES

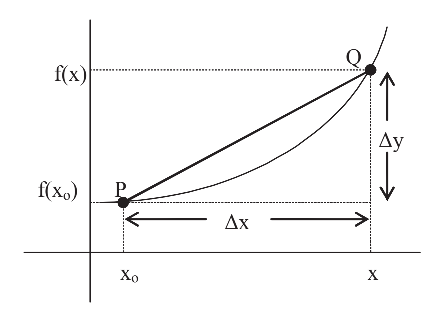
1.5.1. Derivada de una función en un punto

Definición 1.18 Consideremos una función $y = f(x)$ definida en un intervalo $[x_o, x]$. Definimos la tasa de variación media de f en este intervalo como el valor

$$TVM_[x_o, x] = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

donde $\Delta y = f(x) - f(x_o)$ y $\Delta x = x - x_o$ son, respectivamente, los incrementos de las variables dependiente e independiente en el intervalo $[x_o, x]$.

Gráficamente se ve con facilidad que la tasa de variación media coincide con la pendiente del segmento PQ; es decir, con la pendiente de la recta secante a la curva por los puntos P y Q.



Supongamos ahora que x_0 permanece fijo mientras el punto x se aproxima a x_0; es decir, hacemos $x \to x_o$ ó $\Delta x \to 0$. Entonces, es evidente como la secante a la curva por los puntos P y Q se aproxima a la "tangente" a la curva por el punto P y la tasa de variación media se convierte en la tasa de variación instantánea o derivada de la función en el punto. Formalicemos ahora esto que acabamos de comentar.

Si en la definición anterior hacemos $h = x - x_o$ y calculamos el límite cuando h tiende a 0, si el límite existe obtenemos la definición de derivada en un punto:

Definición 1.19 Se dice que una función $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ es *derivable* en un punto $x_0 \in]a, b[$ si existe el límite:

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$$

El valor $f'(x_o)$ se llama *derivada de la función f en el punto x_o*.

También podemos escribir, de acuerdo con la otra notación:

$$f'(x_o) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Ejemplo 1.27 Halla la derivada de la función f en el punto $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución. Aplicamos la definición

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} sin\frac{1}{h}$$

y este límite no existe. En consecuencia, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.▲

Ejemplo 1.28 Estudia la derivabilidad de la función siguiente en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución. Aplicamos la definición

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 sin\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 0$$

Este límite es 0 porque h tiende a cero y está multiplicado por una función acotada (no sabemos qué valor toma $\sin \frac{1}{h}$ pero sí sabemos que es un valor acotado entre -1 y 1).

Por tanto, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.▲

1.5.2. Interpretación geométrica de la derivada

Las coordenadas de los puntos P y Q son, respectivamente, $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. El cociente

$$m_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos P y Q.

Si h tiende a 0, entonces esta secante se confunde con la recta tangente a la curva por el punto P, de donde se deduce que

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

es la pendiente de la recta tangente a la curva por el punto $(x_0, f(x_0))$.

Por tanto, la derivada de una función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. Esto nos soluciona el histórico *problema de la tangente*, el cual consiste en conocer cuál es la recta tangente a una curva en un determinado punto x_0. De acuerdo con el concepto de derivada podemos definir la recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ como aquélla que pasa por el punto y tiene por pendiente $f'(x_0)$. Es decir, la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x_0 es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

En el caso en que $f(x)$ sea continua en x_0 y se tenga que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \pm\infty,$$

la recta tangente en el punto considerado es la recta $x = x_0$.

1.5.3. Derivadas laterales

Definición 1.20 Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto del intervalo $]a, b[$. Decimos que la función f es *derivable por la derecha* en el punto x_0 si existe el

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$

Análogamente,

Definición 1.21 Sea $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto del intervalo $]a, b[$. Decimos que la función f es *derivable por la izquierda* en el punto x_0 si existe el

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$

Por tanto, una función es derivable en un punto x_o cuando es derivable por la derecha y por la izquierda y ambas derivadas coinciden.

Ejemplo 1.29 Sea $f(x) = |x+1|$. ¿Es f derivable en $x = 0$? ¿Y en $x = -1$?

Solución. La función f es

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -x-1 & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

En $x = 0$, la derivada es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h+1-1}{h} = 1 \to f'(0) = 1.$$

Para estudiar la derivabilidad en $x = -1$ hemos de calcular las derivadas laterales, ya que la expresión de f no es la misma por la derecha y por la izquierda del punto. Así, la derivada por la izquierda es:

$$f'_{-}(-1) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-(-1+h)-1-0}{h} = -1$$

y por la derecha:

$$f'_{+}(-1) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-1+h+1-0}{h} = 1.$$

Por tanto f no es derivable en $x = -1$. El punto $x = -1$ es un punto anguloso.▲

La condición de derivabilidad en un punto es más exigente que la de continuidad, como se deduce del siguiente resultado:

Propiedad 2 *Si una función f es derivable en x_0, entonces es continua en x_0.*

Por tanto, para que una función sea derivable en un punto es necesario que sea continua. El recíproco del teorema anterior no es cierto, como lo demuestran los siguientes contraejemplos:

- La siguiente función es continua en $x = 0$, pero hemos visto en el ejemplo (1.27) que no es derivable en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

- La función $f(x) = |x+1|$ es continua en $x = -1$, pero hemos visto en el ejemplo (1.29) que no es derivable en $x = -1$.

1.5.4. Función derivada

Definición 1.22 Sea $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una función derivable en $]a, b[$. La función que a cada punto x le asigna su derivada en el punto x se llama *función derivada de la función f* y se representa por $f'(x)$. La derivada de $f'(x)$ se designa por $f''(x)$ y se llama *derivada segunda* de f. Análogamente se definen las derivadas $f'''(x)$, $f^{iv)}(x)$, etc.

Ejemplo 1.30 Calcula la función derivada de $f(x) = x^2 + 5x - 1$.

Solución. Aplicando la definición de derivada en un punto cualquiera x se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+5(x+h)-1-(x^2+5x-1)}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2xh+5x+5h-1-x^2-5x+1}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2+2xh+5h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(h+2x+5)}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x+5) = 2x+5 \end{aligned}$$

Por tanto, la función derivada de $f(x) = x^2 + 5x - 1$ es $f'(x) = 2x + 5$.▲

Derivadas de las funciones elementales

A continuación damos las funciones derivadas de las funciones elementales más usuales.

i) $f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$

ii) $f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}, n \in \mathbb{R}$

- $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

iii) $f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = a^x \ln a$

- $f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

iv) $f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}\log_a e$

- $f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$

v) $f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$

vi) $f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$

vii) $f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

viii) $f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$

ix) $f(x) = \arcsin x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

x) $f(x) = \arccos x \rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

xi) $f(x) = \arctan x \rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Álgebra de derivadas

Sean f' y g' las funciones derivadas de f y g, respectivamente, en un intervalo $]a,b[$, entonces se tiene que:

i) $(cf(x))' = cf'(x)$, con $c \in \mathbb{R}$.

ii) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

iii) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

iv) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, siempre que $g(x) \neq 0$ en $]a,b[$.

Ejemplo 1.31 Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} a)\ f(x) &= 3\tan x \\ b)\ f(x) &= 2\ln x - \sqrt{x} \\ c)\ f(x) &= x^2 \sin x \\ d)\ f(x) &= \frac{\cos x}{x^3 + x} \end{aligned}$$

Solución.

$$\begin{aligned} a)\ f'(x) &= 3\frac{1}{\cos^2 x} \\ b)\ f'(x) &= 2\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ c)\ f'(x) &= 2x\sin x + x^2 \cos x \\ d)\ f'(x) &= \frac{-\sin x\,(x^3 + x) - \cos x\,(3x^2 + 1)}{(x^3 + x)^2} \quad \blacktriangle \end{aligned}$$

1.5.5. Derivada de funciones compuestas. Regla de la cadena

La tabla anterior nos proporciona las derivadas de funciones elementales. El siguiente resultado, conocido como *la regla de la cadena*, nos permitirá derivar funciones compuestas:

Teorema 1 *Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $I = [a,b]$ y sea $g(y)$ una función definida en $f(I)$ tal que existe $f'(x)$ y existe $g'(f(x)) = g'(y)$ para todo $x \in]a,b[$. Entonces, existe la derivada de la función compuesta $g \circ f$ en x y dicha derivada es:*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

Ejemplo 1.32 Calcula la derivada de la función $h(x) = \sin(x^2 - 4x)$.

Solución. La función h es la composición de la función $f(x) = (x^2 - 4x)$ y la función $g(y) = \sin y$, es decir, $h = g \circ f$. Por ello, aplicando la regla de la cadena, derivamos primero la función seno evaluada en el mismo argumento y a continuación se deriva el argumento, es decir, la f.

$$h'(x) = \cos(x^2 - 4x)\,(2x - 4)\blacktriangle$$

La regla de la cadena se generaliza si se tiene una función compuesta de más de dos funciones.

Ejemplo 1.33 Calcula la derivada de la función $h(x) = \ln\left(\cos(x^3 + 7x)\right)$.

Solución. La función h es la composición de la función $f(x) = (x^3 + 7x)$, la función $g(y) = \cos y$ y la función $k(t) = \ln t$. Por ello, aplicando la regla de la cadena, derivamos primero la función logaritmo evaluada en el mismo argumento, a continuación derivamos la función coseno, evaluada en su argumento, y finalmente se deriva la f.

$$h'(x) = \frac{1}{\cos(x^3 + 7x)}\,(-\sin(x^3 + 7x)\,(3x^2 + 7).\ \blacktriangle$$

Ejercicio 1.4 Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $h(x) = \cos(3x + 5)$	*e)* $h(x) = \tan\sqrt{x + 5}$
b) $h(x) = \sin(x^2)$	*f)* $h(x) = \sin(\cos(\sin x))$
c) $h(x) = \sin^2(x)$	*g)* $h(x) = \ln^3(\cos x)$
d) $h(x) = \sqrt{\sin(4x)}$	*h)* $h(x) = \frac{\cos x^2}{\ln(3x-1)}$

1.5.6. Monotonía

Estudiar la monotonía de una función es analizar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función. Veamos a continuación qué significa que una función sea creciente o decreciente.

Definición 1.23 Una función f definida en un intervalo $]a, b[$ es *creciente* en un punto $x_o \in]a, b[$ si dado un incremento $h > 0$ se verifica:

$$f(x_o - h) \leq f(x_o) \leq f(x_o + h)$$

Si se verifica:

$$f(x_o - h) < f(x_o) < f(x_o + h)$$

diremos que f es *estrictamente creciente.*

Definición 1.24 Una función f definida en un intervalo (a, b) es *decreciente* en un punto $x_o \in (a, b)$ si dado un incremento $h > 0$ se verifica:

$$f(x_o - h) \geq f(x_o) \geq f(x_o + h)$$

Si se verifica:

$$f(x_o - h) > f(x_o) > f(x_o + h)$$

diremos que f es *estrictamente decreciente.*

Definición 1.25 Una función f es *creciente* en un intervalo $]a,b[$ si es creciente en cada uno de sus puntos. Una función f es *decreciente* en un intervalo $]a,b[$ si es decreciente en cada uno de sus puntos.

El siguiente resultado nos muestra que si una función es derivable en un punto x_o, entonces f es creciente (decreciente) en x_o si la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto tiene pendiente positiva (negativa).

Teorema 2 *Sea f una función definida en un intervalo $]a,b[$ y derivable en $x_o \in]a,b[$:*

i) Si $f'(x_o) > 0$, entonces f es estrictamente creciente en x_o.
ii) Si $f'(x_o) < 0$, entonces f es estrictamente decreciente en x_o.

Por tanto, si una función es derivable podemos determinar su crecimiento y decrecimiento estudiando el signo de su primera derivada.

Ejemplo 1.34 Determina los intervalos donde $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ es creciente y los intervalos donde es decreciente.

Solución. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

A continuación, buscamos los valores donde se anula, que serán los que determinan los intervalos donde el signo de $f'(x)$ es constante:

$$3x^2 - 4x = 0 \leftrightarrow x(3x-4) = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = \frac{4}{3}$$

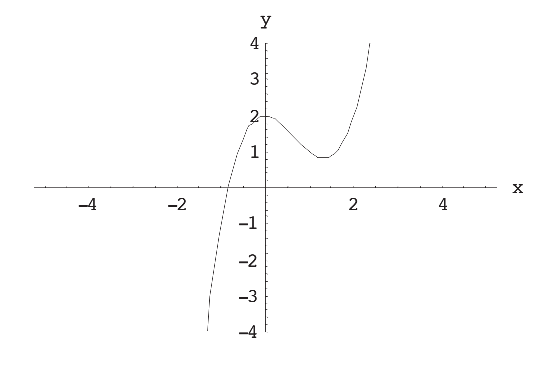
Quedan determinados tres intervalos:

$$]-\infty, 0[\ ,\ ]0, \frac{4}{3}[\ ,\ ]\frac{4}{3}, +\infty[$$

Probando el valor de $f'(x)$ en un punto cualquiera de cada intervalo, conoceremos el signo que toma en dicho intervalo. En este caso, en $]-\infty, 0[$ f' tiene signo positivo, en $]0, \frac{4}{3}[$ tiene signo negativo y en $]\frac{4}{3}, +\infty[$ tiene signo positivo.

Por tanto se tiene que la función f es estrictamente creciente en $]-\infty, 0[$, y en $]\frac{4}{3}, +\infty[$ y es estrictamente decreciente en $]0, \frac{4}{3}[$.

Podemos observar los resultados obtenidos en la gráfica de f.



▲

Ejemplo 1.35 Determina los intervalos de crecimiento y derecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{x^2}.$$

Solución. Calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = x - \frac{16}{x^3}$$

Buscamos ahora los valores donde se anula f':

$$x - \frac{16}{x^3} = 0 \leftrightarrow x^4 - 16 = 0 \leftrightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2$$

En este caso, puesto que 0 es un punto que no pertenece al dominio, quedan determinados los siguientes intervalos:

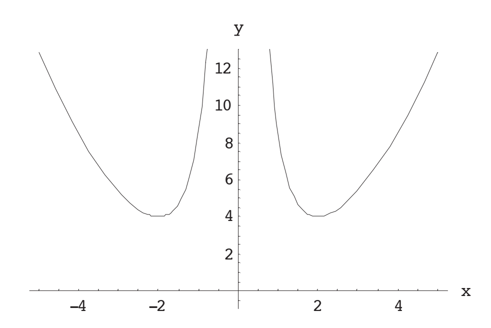
$$]-\infty, -2[\ ,\ ]-2, 0[\ ,\ ]0, 2[\ ,\ ]2, +\infty[$$

ya que al no ser continua la función en $x = 0$, puede haber un cambio de signo de f' y por tanto, un cambio de crecimiento de f.

Probando el valor de $f'(x)$ en un punto cualquiera de cada intervalo, obtenemos que en $]-\infty, -2[$ f' tiene signo negativo, en $]-2, 0[$ tiene signo positivo, en $]0, 2[$ tiene signo negativo y en $]2, +\infty[$ tiene signo positivo.

Por tanto, la función f es estrictamente decreciente en $]-\infty, -2[$ y en $]0, 2[$ y es estrictamente creciente en $]-2, 0[$ y en $]2, +\infty[$.

Podemos observar los resultados obtenidos en la gráfica de f.



▲

El recíproco del teorema anterior no es cierto; puede ocurrir que $f'(x_o)$ sea 0 y que la función en dicho punto sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Ejemplo 1.36 Comprobemos la afirmación anterior para la función $f(x) = x^3$ en el punto $x_o = 0$.

Solución. La derivada de esta función es $f'(x) = 3x^2$, que se anula en $x = 0$. Como el dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$, quedan determiandos los intervalos

$$]-\infty, 0[\ \text{y}\ ]0, +\infty[$$

Probando el valor de $f'(x)$ en un punto cualquiera de cada intervalo, obtenemos que en $]-\infty, 0[$ f' tiene signo positivo y en $]0, +\infty[$ también tiene signo positivo.

Por tanto, esta función es estrictamente creciente $]-\infty, 0[$ y estrictamente creciente en $]0, +\infty[$, esto implica que en $x = 0$ la función f es estrictamente creciente. ▲

1.5.7. Máximos y mínimos relativos

Definición 1.26 Una función f presenta un *máximo relativo o local* en un punto x_o si dado un incremento $h > 0$:

$$f(x_o) \geq f(x_o + h)$$
$$f(x_o) \geq f(x_o - h)$$

Definición 1.27 Una función f presenta un *mínimo relativo o local* en un punto x_o si dado un incremento $h > 0$:

$$f(x_o) \leq f(x_o + h)$$
$$f(x_o) \leq f(x_o - h)$$

En ambos casos se dice que f tiene un *extremo local o relativo* en x_o.

Si una función f es continua en un punto x_o, en dicho punto hay un máximo relativo si y sólo si f pasa de ser creciente a ser decreciente en x_o.

Si una función f es continua en un punto x_o, en dicho punto hay un mínimo relativo si y sólo si f pasa de ser decreciente a ser creciente en x_o.

Si la función f no es continua en un punto x_o, puede haber un cambio de crecimiento y no haber extremos relativo en x_o.

Si las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas diremos que f tiene en x_o un *máximo o mínimo relativo estricto.*

Teorema 3 *Sea f una función definida en un intervalo (a, b). Si f tiene un extremo relativo en un punto $x_o \in (a, b)$ y es derivable en x_o, entonces se cumple que $f'(x_o) = 0$.*

Observemos que en este caso la recta tangente a f en x_o tiene pendiente nula, es decir, es paralela al eje X.

El recíproco del teorema no es cierto, ya hemos visto en el ejemplo (1.36) que la función $f(x) = x^3$ verifica que $f'(0) = 0$ y sin embargo en $x_o = 0$ no hay extremo local.

Para buscar los extremos de una función no basta con calcular aquellos puntos donde se anula la derivada primera, puede que éstos no sean extremos. Y además puede haber extremos allí donde la función no es derivable.

También podemos clasificar los extremos utilizando el signo de la segunda derivada:

Teorema 4 *Sea f una función derivable en (a, b) y sea $x_o \in (a, b)$:*

i) Si $f'(x_o) = 0$ y $f''(x_o) > 0$, entonces en x_o hay un mínimo local estricto.

ii) Si $f'(x_o) = 0$ y $f''(x_o) < 0$, entonces en x_o hay un máximo local estricto.

Ejemplo 1.37 Halla los extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = -x^2 + 8x - 7$.

Solución. Calculemos en qué puntos se anula la función derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = -2x + 8 = 0 \leftrightarrow x = 4$$

Luego en $x = 4$ tenemos un posible extremo local. Estudiemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento. Puesto que $f'(0) > 0$, tenemos que f' toma valores positivos en todo el intervalo $]-\infty, 4[$ y puesto que $f'(5) < 0$, tenemos que f' toma valores negativos en todo el intervalo $]4, +\infty[$. Por tanto, la función f es estrictamente creciente en $]-\infty, 4[$ y es estrictamente decreciente en $]4, +\infty[$ y en el punto $x = 4$ hay un máximo relativo estricto.

Un modo alternativo de clasificar el punto $x = 4$ es sustituirlo en la derivada segunda. Puesto que $f''(x) = -2 \rightarrow f''(4) = -2 < 0$, por tanto en $x = 4$ hay un máximo relativo estricto.▲

1.5.8. Máximos y mínimos absolutos

Definición 1.28 Sea f una función definida en un dominio D, entonces:

(i) f presenta un *máximo absoluto* en x_o si $f(x_o) \geq f(x)$, $\forall x \in D$.
(ii) f presenta un *mínimo absoluto* en x_o si $f(x_o) \leq f(x)$, $\forall x \in D$.

Ejemplo 1.38 Halla el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ en el intervalo $[-1/2, 4]$.

Solución. Calculamos en primer lugar los intervalos de crecimiento y decrecimiento mediante el estudio del signo de la primera derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$$

Teniendo en cuenta el dominio de definición de esta función, estudiamos el signo en los intervalos $[-1/2, 0[$, $]0, 2[$ y $]2, 4]$. Así, se tiene que f es estrictamente creciente en $[-1/2, 0[$ y en $]2, 4]$ y es estrictamente decreciente en $]0, 2[$. Por tanto, en $x = 0$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ hay un mínimo relativo. El máximo absoluto lo encontraremos en $x = 0$ o en $x = 4$, ya que la función es estrictamente creciente a partir de $x = 2$ y en el extremo de la derecha puede tomar un valor superior al valor que toma en $x = 0$. Comparemos estos dos valores:

$$f(0) = 0 \text{ y } f(4) = 16$$

Por tanto, el máximo absoluto está en $x = 4$ y vale 16. Análogamente, el mínimo absoluto está, en $x = 2$ o en $x = -1/2$, ya que la función crece en $[-1/2, 0[$ y es posible que tome un valor menor en el extremo izquierdo. Comparemos estos dos valores:

$$f(-1/2) = -7/8 \text{ y } f(2) = -4$$

Por tanto, el mínimo absoluto está en $x = 2$ y vale -4. ▲

Ejemplo 1.39 Una empresa fabrica maletas que vende a 134 euros. El coste de fabricar x maletas viene dado por la función:

$$C(x) = \frac{1}{12}x^3 - 5x^2 + 170x + 220$$

¿Cuántas maletas debe fabricar que el beneficio sea máximo?

Solución.. La función de beneficios $B(x)$ viene definida por:

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

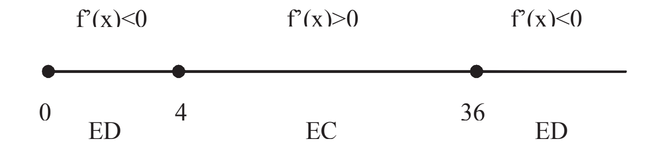
donde $I(x) = 134x$ es la función de ingresos (precio por cantidad) y $C(x)$ es la función de costes. Por tanto,

$$B(x) = 134x - (\frac{1}{12}x^3 - 5x^2 + 170x + 220) = -\frac{1}{12}x^3 + 5x^2 - 36x - 220$$

Nuestro objetivo es calcular el máximo absoluto de B. Para ello, analizaremos los intervalos de crecimiento de la función mediante el signo de la derivada primera:

$$B'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 10x - 36 = 0 \leftrightarrow x = 4 \text{ ó } x = 36$$

Calculemos el signo que toma en cada uno de estos intervalos: $[0, 4[$, $]4, 36[$ y $]36, +\infty[$:



Observemos que no nos interesan los valores negativos de la variable x, que representa en número de maletas a fabricar.

En el punto $x = 36$, la función pasa de ser estrictamente creciente a ser estrictamente decreciente, por tanto hay un máximo local en dicho punto, pero para obtener el máximo absoluto deberemos comparar los valores de B en dicho punto y en $x = 0$, ya que en este punto podría toma un valor mayor que en $x = 36$. Puesto que $B(0) = -300$ y $B(36) = 2076$, deducimos que el máximo absoluto se encuentra en $x = 36$, es decir para obtener el beneficio máximo la compañía deberá fabricar 36 maletas. ▲

Ejercicio 1.5 Halla el máximo y mínimo absoluto de cada función en el intervalo dado:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ en $[0, 3]$.

b) $h(x) = 4x + \frac{16}{x^2}$ en $[1, 4]$.

c) $j(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 + 2t & \text{si } -4 \leq t < 2 \\ 8 - t & \text{si } 2 \leq t < 5 \end{cases}$

d) $k(x) = \begin{cases} 360x - 3x^2 & \text{si } 50 \leq x < 100 \\ 60x & \text{si } 100 \leq x < 150 \end{cases}$

1.5.9. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Definición 1.29 Se dice que una función f definida y derivable en (a, b) es *cóncava* en un punto $x_o \in (a, b)$ si en un entorno del punto, la gráfica de la función queda por encima de la recta tangente a dicha gráfica en x_o (excepto en el punto de contacto).

Se dice que la función f es *convexa* en x_o si queda por debajo.

Definición 1.30 Se dice que una función f es *cóncava en un intervalo* (a, b) si es cóncava en cada uno de los puntos de dicho intervalo. Se dice que una función f es *convexa en un intervalo* (a, b) si es convexa en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Teorema 5 *Si f es derivable en $x_o \in (a, b)$ y admite derivada segunda en $x_o \in (a, b)$, entonces:*

$$\text{i) si } f''(x_o) > 0, \text{ entonces } f \text{ es cóncava en } x_o$$
$$\text{ii) si } f''(x_o) < 0, \text{ entonces } f \text{ es convexa en } x_o$$

Estudiaremos el signo de la derivada segunda de una función para determinar los intervalos de concavidad y convexidad.

Ejemplo 1.40 Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 11$.

Solución. Calculemos los puntos donde se anula $f''(x)$ para determinar los intervalos:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$f''(x) = 6x - 18 = 0 \leftrightarrow x = 3$$

Puesto que el dominio de esta función es $\mathbb{R}$, quedan determinados los intervalos $]-\infty, 3[$ y $]3, +\infty[$. Sustituyendo un punto cualquiera de cada intervalo en f'' obtenemos el signo que f'' toma en cada uno de ellos:

f ''(x)<0 f ''(x)>0

convexa 3 cóncava

La función f es convexa en $]-\infty, 3[$ y es cóncava en $]3, +\infty[$.▲

Definición 1.31 Una función f derivable en un intervalo (a, b) presenta un *punto de inflexión* en $x_o \in (a, b)$ si en dicho punto la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

Por tanto, en los puntos de inflexión la recta tangente a una curva atraviesa dicha curva.

Teorema 6 *Si una función f derivable en (a, b) tiene un punto de inflexión en $x_o \in (a, b)$ y admite derivada segunda en dicho punto, entonces $f''(x_o) = 0$.*

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Puede ocurrir que $f''(x_o) = 0$ y en x_o haya un extremo.

Ejemplo 1.41 Estudia los intervalos de concavidad y convexidad de la función $f(x) = x^4$.

Solución. Calculemos los puntos donde se anula $f''(x)$ para determinar los intervalos:

$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2 = 0 \leftrightarrow x = 0$$

Puesto que $f''(x) > 0$ para cualquier valor de x, esta función cóncava para todo x. Como se observa, aunque en $x = 0$ se anula la derivada segunda, la función es cóncava en dicho punto.▲

Ejercicio 1.6 Determina los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

b) $g(x) = \ln(x^2 + 4)$

c) $p(x) = \frac{x+3}{x^2}$

d) $m(x) = \frac{x^2+x+2}{x-1}$

1.6. CÁLCULO DE LÍMITES. REGLA DE L'HÔPITAL

Teorema 7 *Sean f y g funciones derivables en un entorno reducido $]a-\delta, a+\delta[$, con $\delta > 0$, de un punto $a \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

y existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

entonces también existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

y se verifica además:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

NOTAS:

i) El enunciado del teorema también es válido cuando

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

Asimismo, se puede formular de modo análogo si a es $+\infty$ ó $-\infty$.

ii) Si en la expresión $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se vuelve a presentar una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, se puede volver a aplicar la regla de L'Hôpital (siempre que se verifiquen las hipótesis del teorema).

iii) Para resolver indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, haremos la siguiente transformación:

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

obteniendo así una indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ y, a continuación, aplicaremos la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 1.42 $\lim_{x\to 0^+} \sin(2x) \ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin 2x}} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-2\cos(2x)}{\sin^2(2x)}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2(2x)}{-2x\cos(2x)} = (\tfrac{0}{0}) = \lim_{x\to 0^+} \frac{4\sin(2x)\cos(2x)}{-2\cos(2x) + 4x\sin(2x)} = 0.$$

iv) Para resolver indeterminaciones del tipo 0^0 ó ∞^0 aplicaremos logaritmos, obteniendo una de las indeterminaciones anteriores.

Ejemplo 1.43 $\lim_{x\to 0^+} x^{sen(2x)} = e^{\ln \lim_{x\to 0^+} x^{sen(2x)}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln x^{sen(2x)}} = e^{\lim_{x\to 0^+} sen(2x)\ln x} =$ $e^0 = 1$.

El límite del exponente ha sido calculado en el ejemplo anterior.

Ejercicio 1.7 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$

c) $\lim_{x\to 0} x^x$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x - x^2}{\sin^2(\frac{x}{3})}$

e) $\lim_{x\to 0} (\frac{a^x+b^x}{2})^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x\to 1^+} (1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

h) $\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

i) $\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{\ln x}}$

j) $\lim_{x\to e} \frac{(x-e)^2}{\ln x - 1}$

1.7. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Para representar la gráfica de una función $f(x)$ llevaremos a cabo el estudio de los siguientes apartados:

i) Dominio.

ii) Puntos de corte de f con los ejes.

Corte con el eje Y : es el punto $(0, f(0))$

Cortes con el eje X : hallamos las raíces de la función, es decir, calculamos los puntos donde $f(x) = 0$.

iii) Simetrías.

Una función presenta una simetría par, si $f(-x) = f(x)$. Es decir, la gráfica es simétrica respecto del eje Y.

Una función presenta una simetría impar, si $f(-x) = -f(x)$. Es decir, la gráfica es simétrica respecto del origen.

iv) Asíntotas.

Asíntotas verticales: son las rectas $x = a$, donde a son los valores tales que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

Asíntotas horizontales: se obtienen al estudiar el comportamiento de la función en el infinito, es decir, si la función crece o decrece infinitamente o tiende a algún valor. Por tanto, son las rectas $y = b$, donde b es un valor tal que:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{o} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Asíntotas oblícuas: son las rectas $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

y

$$n = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx)$$

o bien,

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

y

$$n = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx)$$

Observemos que la asíntota horizontal es un caso particular de asíntota oblícua, cuando $m = 0$. Si obtenemos una asíntota horizontal no hace falta buscar la oblícua por ese lado.

v) Estudio de la primera derivada.

Con el estudio de la primera derivada de la función, obtendremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos.

vi) Estudio de la segunda derivada.

Con el estudio de la derivada segunda de la función, obtendremos los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión

Ejemplo 1.44 Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Solución.

i) Dominio.

Puesto que el denominador se anula en $x = -1$ y en $x = 1$, el dominio es:

$$dom\,(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

ii) Puntos de corte de f con los ejes.

Corte con el eje $Y : f(0) = 0$, por tanto corta en $(0, 0)$.

Corte con el eje $X : f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$, luego es $(0, 0)$ es el único corte corte con el eje X.

iii) Simetrías. Presenta una simetría respecto del origen ya que:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$$

iv) Asíntotas.

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty \text{ y } \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty$$

por tanto, tenemos dos asíntotas verticales, las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

Veamos con más detalle los límites laterales para dibujar la gráfica.

Aproximación a la recta $x = -1$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{-1}{0^+} = -\infty \\ \lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} &= \frac{-1}{0^-} = +\infty \end{aligned}$$

Aproximación a la recta $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Asíntota horizontal: al hallar los límites de f en el infinito vemos que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = +\infty$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$$

por tanto, no hay asíntotas horizontales.

Asíntota oblícua: buscamos la recta $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$$

y

$$n = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

Luego hay una asíntota oblícua de ecuación $y = x$. Puesto que hemos calculado los límites cuando $x \to \infty$, la asíntota existe por los dos lados, es decir por $-\infty$ y por $+\infty$.

v) Estudio de la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \longleftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \longleftrightarrow x^2(x^2-3) = 0 \longleftrightarrow x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}$$

Teniendo es cuenta los valores donde se anula la derivada y los puntos fuera del dominio, estudiamos el signo de f' en los intervalos que se dan a continuación, obteniendo que:

-f es estrictamente creciente en $]-\infty, -\sqrt{3}[$ y en $]\sqrt{3}, +\infty[$.

-f es estrictamente decreciente en $]-\sqrt{3}, -1[$, en $]-1, 0[$, $]0, 1[$ y en $]1, \sqrt{3}[$

Por tanto, f presenta un máximo relativo estricto en $x = -\sqrt{3}$ y un mínimo relativo estricto en $x = \sqrt{3}$. En $x = 0$ la función es estrictamente decreciente.

vi) Estudio de la derivada segunda:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - (x^4-3x^2)2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1) - (x^4-3x^2)4x}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0 \leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Teniendo es cuenta este valor donde se anula la derivada segunda y los puntos fuera del dominio, estudiamos el signo de f'' en los siguientes intervalos:

-en $]-\infty,-1[$, $f''<0$, por tanto f es convexa.

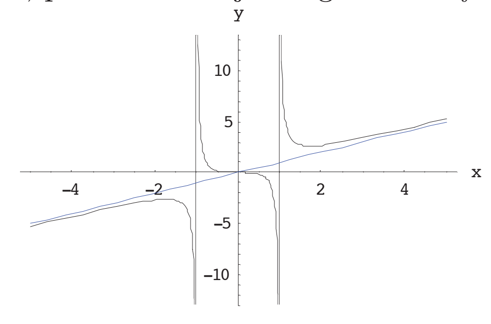
-en $]-1,0[$, $f''>0$, por tanto f es cóncava.

-en $]0,1[$, $f''<0$, por tanto f es convexa.

-en $]1,+\infty[$, $f''>0$, por tanto f es cóncava.

Por tanto la función tiene un punto de inflexión en $x=0$.

Con los datos obtenidos, podemos dibujar la gráfica de f :



▲

Ejercicio 1.8 Representa gráficamente las siguientes funciones:

$$a)\ f(x)=\frac{x^3}{3-x^2} \qquad c)\ f(x)=\frac{2x^2+3x-4}{x^2}$$
$$b)\ f(x)=e^{1/x} \qquad d)\ f(x)=\frac{x^2-x}{x-2}$$

1.8. APLICACIONES AL COMERCIO Y A LA ECONOMÍA

Resumen de fórmulas y términos comerciales:
x : cantidad de unidades producidas o vendidas
p : precio por unidad
I : ingreso obtenido al vender x unidades

$$I=p\cdot x$$

C : coste de producción (venta, distribución...) de x unidades
$\bar{C}$: coste medio (coste por unidad)

$$\bar{C}=\frac{C}{x}$$

B : beneficio de la venta de x unidades

$$B=I-C$$

Definición 1.32 La *función de demanda*

$$p=f(x) \qquad \text{ó} \qquad x=g(p)$$

es la relación entre el precio y la cantidad vendida, es decir, proporciona el número de unidades x que los consumidores compran a un precio p.

En situaciones reales un crecimiento en las ventas se consigue mediante una reducción del precio por unidad y dicha reducción del precio conlleva, a posteriori, un descenso de los beneficios. La idea es optimizar la bajada del precio de modo que las ventas aumenten y el beneficio sea máximo.

Ejemplo 1.45 Un fabricante vende 2000 unidades al mes a 10 euros cada unidad y calcula que sus ventas mensuales crecerán en 250 unidades por cada 0,25 euros de reducción en el precio unitario. Halla la función de demanda correspondiente.

Solución. Sea x el número de unidades vendidas y p el precio unitario. Construimos la siguiente tabla:

x(unidades)	p(euros)
2000	10
$2000+250$	$10-0{,}25$
$\vdots$	$\vdots$
$2000+250n$	$10-0{,}25n$

Para obtener la función de demanda, necesitamos la relación entre p y x. Como:

$$p = 10 - 0{,}25n$$

y

$$x = 2000 + 250n,$$

despejamos n en la segunda ecuación

$$n = \frac{x-2000}{250}$$

y sustituimos en la primera:

$$p(x) = 10 - 0{,}25\frac{x-2000}{250} = 12 - \frac{x}{1000}$$

Esta función nos dará el precio que hay que establecer para obtener una cantidad dada de ventas. Si despejamos x, podemos saber la cantidad que se venderá a un determinado precio. ▲

Ejemplo 1.46 Una fabrica de artículos de piel ha vendido este año 10.000 carteras a 20 euros cada una. El fabricante estima que si el próximo año aumenta el precio, venderá 400 carteras menos por cada euro de incremento. Si el coste de fabricación de cada cartera es de 8 euros, calcula:

-a qué precio deberá vender las carteras para obtener el máximo beneficio.

-a cuánto asciende dicho beneficio.

Solución. La función de beneficios $B(x)$ viene definida por:

$$B(x) = I(x) - C(x)$$

donde $I(x)$ es la función de ingresos (precio por cantidad) y $C(x)$ es la función de costes. Pero en este caso el precio no es fijo sino que viene determinado por la función de demanda.

Para obtener la función de demanda construimos la siguiente tabla:

x(carteras)	p(precio en euros)
10000	20
$10000 - 400$	$20 + 1$
$\vdots$	$\vdots$
$10000 - 400n$	$20 + n$

Como

$$p = 20 + n$$

y

$$x = 10000 - 400n$$

podemos despejar n en la segunda ecuación:

$$n = \frac{10000 - x}{400}$$

y sustituirla en la expresión del precio p, obteniendo la función de demanda:

$$p(x) = 20 + \frac{10000 - x}{400} = 20 + 25 - \frac{x}{400} = 45 - \frac{x}{400}$$

La función de costes viene dada por

$$C(x) = 8x$$

por tanto, la función de beneficios es:

$$B(x) = (45 - \frac{x}{400})x - 8x = 45x - \frac{x^2}{400} - 8x = 37x - \frac{x^2}{400}$$

Nuestro objetivo es calcular el máximo absoluto de B. Para ello, calculamos la derivada primera y buscamos los extremos relativos:

$$B'(x) = 37 - \frac{2x}{400} = 0 \leftrightarrow x = 7400$$

Puesto que la función es estrictamente creciente en $]0, 7400[$ y es estrictamente decreciente en $]7400, +\infty[$, en el punto $x = 7400$ se tiene un máximo relativo que es además máximo absoluto.

Por tanto, el máximo beneficio se obtendrá cuando venda 7400 carteras y el precio que debe establecer lo obtendremos a partir de la función de demanda:

$$p(7400) = 45 - \frac{7400}{400} = 26,5 \text{ euros}$$

El beneficio obtenido en este caso será:

$$B(7400) = 37 \cdot 400 - \frac{7\,400^2}{400} = 136900 \text{ euros.} \ \blacktriangle$$

TEMA 2

ÁLGEBRA LINEAL

2.1. MATRICES

Definición 2.1 Una *matriz $m \times n$ de números reales* es un conjunto de $m \times n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$$

siendo m y n enteros positivos cualesquiera.

Diremos que la matriz tiene *dimensión (orden o tamaño)* $m \times n$.

Representaremos por a_{ij} al elemento que ocupa la fila i y la columna j.

Denotamos por $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ al conjunto de todas matrices de números reales de dimensión $m \times n$. Así, la expresión $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ significa que A pertenece a este conjunto, es decir, que A es una matriz real de dimensión $m \times n$.

El concepto de matriz puede generalizarse cambiando $\mathbb{R}$ por cualquier otro cuerpo K. Para los propósitos de este curso es suficiente trabajar con matrices sobre $\mathbb{R}$. En lo que sigue diremos matriz entendiendo por ello "matriz de números reales".

Definición 2.2 Decimos que dos matrices $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$ son *iguales*, y lo representamos $A = B$ si se verifica

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{y} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

Definición 2.3 Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$, se llama *traspuesta* de A a una matriz $B = (b_{ij})_{1 \le i \le n}^{1 \le j \le m}$ tal que

$$b_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i = 1, \dots, m \quad \text{y} \quad \forall j = 1, \dots, n$$

y se denota A^t.

Es decir, A^t es la matriz que resulta de cambiar las filas de la matriz A por sus columnas y viceversa. Además se verifica, obviamente, que si A tiene dimensión $m \times n$, entonces A^t tiene dimensión $n \times m$.

Ejemplo 2.1 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1/2 \\ 0 & \pi & -1 \end{pmatrix}$$

se tiene que

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \pi \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.4 Una matriz A es *cuadrada* si su dimensión es $n \times n$.

En ese caso diremos que A es de dimensión n y representaremos por $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ al conjunto de todas la matrices cuadradas de dimensión n.

Definición 2.5 Una matriz cuadrada es *diagonal* si $a_{ij} = 0$ siempre que $i \neq j$.

Definición 2.6 Los elementos de una matriz de la forma a_{ii} forman la llamada *diagonal principal.*

Definición 2.7 Se llama matriz *identidad* de orden n, a una matriz diagonal tal que $a_{ii} = 1$, para cada $i = 1, ..., n$. Se denota I_n.

Ejemplo 2.2

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Definición 2.8 Si la dimensión de una matriz es $1 \times n$, se llama *matriz fila*; si la dimensión de una matriz es $n \times 1$, se llama *matriz columna.*

2.1.1. Álgebra de matrices

- *Suma de matrices*

  Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$ y $B = (b_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$, se llama matriz suma de A y B a una matriz $C = (c_{ij})_{1 \le i \le m}^{1 \le j \le n}$ tal que

  $$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m \quad y \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

  y se denota $A + B$.

  El conjunto $\mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ con la operación suma tiene estructura de grupo abeliano; esto significa que la suma de matrices tiene las siguientes propiedades (como es fácil comprobar a partir de las propiedades de la suma de números reales):

  (i) La suma es una operación en $\mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$; es decir, si $A, B \in \mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, entonces $A + B \in \mathfrak{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(ii) Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$; cualesquiera que sean A, B, $C \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(iii) Existe una matriz O, llamada *matriz nula*, cuyos elementos son todos 0, y tal que $A+O=O+A=A$, para cualquier matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(iv) Para cualquier matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$, existe otra matriz llamada *matriz opuesta* de A, cuyos elementos son los opuestos de los elementos de A, y que representamos $-A=(-a_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$, tal que $A+(-A)=(-A)+A=O$.

(v) Conmutativa: $A+B=B+A$, cualesquiera que sean $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

- *Producto de una matriz por un número real*

  Dada una matriz $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$ y dado un número real $\alpha \in \mathbb{R}$, se llama matriz producto de α por A a una matriz $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq m}^{1\leq j\leq n}$ tal que

$$b_{ij}=\alpha\, a_{ij}, \qquad \forall i=1,\dots,m \quad \text{y} \quad \forall j=1,\dots,n$$

  y se denota $\alpha\, A$.

  El conjunto $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las operaciones suma y producto por un número real tiene estructura de espacio vectorial, lo que significa que además de las propiedades que hemos enunciado para la suma se verifican:

(i) Si $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, entonces $\alpha A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(ii) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$; para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ y cualesquiera que sean $A, B \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(iii) $(\alpha+\beta)\,A=\alpha\,A+\beta\,A$; para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cualquier matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(iv) $(\alpha\,\beta)\,A=\alpha\,(\beta\,A)$; para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y cualquier matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

(v) $1\,A=A$, para cualquier matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo 2.3 Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix},$$

calcula $A+B$, $3B$.

Solución.

$$A+B=\begin{pmatrix} -1+2 & 3+(-1) \\ 2+3 & 0+5 \\ 4+4 & 1+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 5 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$3B=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot(-1) \\ 3\cdot 3 & 3\cdot 5 \\ 3\cdot 4 & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 9 & 15 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \blacktriangle$$

Ejercicio 2.1 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

y tomando $\alpha = 3$ y $\beta = -2$ comprueba todas las propiedades de la suma y del producto de un número real por una matriz.

- *Producto de matrices*

  Para definir el producto de dos matrices, $A\,B$, hay que tener en cuenta que el número de columnas de la primera matriz ha de ser igual que el número de filas de la segunda. El producto es una nueva matriz que tiene tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda, es decir, si A tiene dimensión $m \times n$ y B tiene dimensión $n \times p$, la matriz producto C tendrá dimensión $m \times p$. Si sucede así, definimos el producto del siguiente modo:

  Dadas dos matrices $A = (a_{ij})_{1\le i\le m}^{1\le j\le n}$ y $B = (b_{ij})_{1\le i\le n}^{1\le j\le p}$, se llama matriz producto de A por B a una matriz $C = (c_{ij})_{1\le i\le m}^{1\le j\le p}$ tal que

  $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m \quad \text{y} \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

  y se denota AB.

Ejemplo 2.4 Calcula el producto de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 2} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 4 \end{pmatrix}_{2\times 4}$$

Solución.

$$AC = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 1 + 3\cdot 5 & (-1)\cdot 3 + 3\cdot 2 & (-1)\cdot 1 + 3\cdot 7 & (-1)\cdot 0 + 3\cdot 4 \\ 2\cdot 1 + 0\cdot 5 & 2\cdot 3 + 0\cdot 2 & 2\cdot 1 + 0\cdot 7 & 2\cdot 0 + 0\cdot 4 \\ 4\cdot 1 + 1\cdot 5 & 4\cdot 3 + 1\cdot 2 & 4\cdot 1 + 1\cdot 7 & 4\cdot 0 + 1\cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 3 & 20 & 12 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 9 & 14 & 11 & 4 \end{pmatrix}_{3\times 4} . \blacktriangle$$

Ejercicio 2.2 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

comprueba que se verifica la propiedad asociativa del producto; es decir, que $A(BC) = (AB)C$.

Ejercicio 2.3 Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

comprueba que se verifica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma; es decir, que $A(B + C) = AB + AC$.

Ejercicio 2.4 Comprueba con las matrices A y B del ejercicio anterior que el producto de matrices no es conmutativo

2.2. DETERMINANTES

Toda matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ de orden n tiene asociado un número real llamado *determinante.* Este número se obtiene mediante sumas y restas de productos de n elementos de la matriz sin que coincidan en cada producto elementos de una misma fila o columna.

El concepto de determinante surgió antes de que se desarrollara la teoría de matrices; sus aplicaciones en geometría analítica y sistemas de ecuaciones lineales impulsaron su estudio. El conocimiento de los determinanes es útil en aplicaciones del álgebra lineal.

Llamamos *determinante de orden* n al determinante de una matriz de dimensión n y lo representamos $\det(A)$, $|A|$, $|a_{ij}|$ o bien:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

A continuación nos centraremos en el cálculo de determinantes. Comenzaremos por obtener fórmulas sencillas para los determinantes de orden 1, 2 y 3 y daremos una fórmula general para determinantes de cualquier orden.

En lo sucesivo, en esta sección, siempre que digamos matriz significará matriz cuadrada.

2.2.1. Cálculo de determinantes

- Sea A una matriz de orden 1; es decir, $A = (a_{11})$, entonces

$$\det(A) = a_{11}$$

- Sea A es una matriz de orden 2 entonces

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

  Podemos visualizar esta fórmula como el producto de los elementos de la diagonal principal ($\searrow$) menos el producto de los elementos de la diagonal secundaria ($\swarrow$).

Ejemplo 2.5 Calcula el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución.
$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - (-3) \cdot 4 = 22. \ \blacktriangle$$

- Sea A una matriz de orden 3, entonces:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Esta fórmula puede visualizarse en la llamada *Regla de Sarrus*, que consiste en copiar debajo de la última fila las dos primeras; entonces los tres primeros productos de la fórmula anterior son los productos de los elementos de la diagonal principal y de las dos diagonales paralelas siguientes. Los otros tres productos que van con signo negativo, son los de los elementos de la diagonal secundaria y de las dos paralelas siguientes.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} \end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - \\ \quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{array}$$

La regla de Sarrus no se generaliza para determinantes de orden mayor.

Ejemplo 2.6

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \end{matrix} \end{array} = 1 \cdot 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 - 4 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-2) = -8$$

Con el propósito de facilitar la comprensión del cálculo de determinantes de orden superior y de simplificar la notación, introduciremos dos nuevos conceptos.

Definición 2.9 Dada una matriz A de orden n se llama *menor complementario* de un elemento a_{ij} al determinante de la matriz de orden $(n-1)$ que se forma al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.

Ejemplo 2.7 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

el menor complementario del elemento a_{13} es

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 0 - 3 \cdot 4 = -12$$

y el menor complementario del elemento a_{32} es

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-1) = 1.$$

Definición 2.10 Dada una matriz A de orden n se llama *adjunto* de un elemento a_{ij} y se denota A_{ij} al resultado de multiplicar el menor complementario de a_{ij} por $(-1)^{i+j}$.

Es decir, el adjunto y el menor complementario de un elemento son iguales si la suma de los subíndices del elemento es un número par; mientras que si es un número impar, el adjunto es el menor complementario cambiado de signo.

Ejemplo 2.8 Para la matriz del ejemplo anterior se tiene que el adjunto del elemento a_{13} es $A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot (-12) = -12$ y el adjunto del elemento a_{32} es $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot 1 = -1$.

La siguiente proposición nos proporciona una fórmula para calcular determinantes de cualquier orden.

Proposición 1 El determinante de una matriz de orden n es la suma de los productos de los elementos de cualquier fila (o columna) por sus respectivos adjuntos.

Apliquemos este resultado para comprobar la fórmula del determinante de orden 3. Eligiendo, por ejemplo, la primera fila para efectuar el desarrollo de la proposición anterior, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Ejercicio 2.5 Comprueba el resultado del ejemplo anterior desarrollando el determinante por la tercera columna.

Ejemplo 2.9 Calcula el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución. Para desarrollar por una fila o columna buscaremos aquélla que contenga más ceros, ya que de este modo hay que realizar menos cálculos.

En este caso, elegimos la segunda fila para desarrollar:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 7 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \cdot A_{12} + 4 \cdot A_{22} + 7 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{24} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-25 + 6 - 1 - 20) - 7 \cdot (2 + 12 - 15 + 15 - 2 - 12) =$$

$$= 4 \cdot (-40) - 7 \cdot 0 = -160. \blacktriangle$$

El cálculo de un determinante de tamaño $n \geq 4$, si nos limitamos a aplicar la definición, puede resultar excesivamente tedioso. Por ejemplo, para calcular un determinante de tamaño 5, podríamos tener que calcular 5 determinantes de tamaño 4 y para cada uno de éstos, 4 de tamaño 3; es decir, tendríamos que calcular $5 \cdot 4 = 20$ determinantes de tamaño 3. Para simplificar los cálculos podemos aplicar alguna de las propiedades de los determinantes que damos a continuación.

Propiedades de los determinantes

i) El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta.

Esto significa que el valor del determinante de una matriz no varía al cambiar las filas por las columnas y viceversa. Como consecuencia de ello, todas las propiedades que se enuncian para las filas, son igualmente válidas para las columnas.

Ejemplo 2.10

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 7 \cdot 5 = -38, \qquad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 5 \cdot 7 = -38$$

ii) Si intercambiamos entre sí dos filas (o dos columnas), el determinante cambia de signo.

Ejemplo 2.11

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 55, \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -55$$

iii) Si multiplicamos una fila (o una columna) por un número real cualquiera α, el determinante queda multiplicado por α.

Ejemplo 2.12

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 55, \qquad \begin{vmatrix} -1 & \overset{\times 2}{4} & 3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & 0 \end{vmatrix} = 110$$

iv) Si todos los elementos de una fila (o de una columna) son 0, el determinante vale 0.

v) Si dos filas (o dos columnas) son iguales, el determinante vale 0.

vi) Si una fila (o columna) es combinación lineal de otras filas (o columnas), el determinante vale 0.

Ejemplo 2.13

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 13 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ya que} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

vii) Si a una fila (columna) le sumamos una combinación lineal de otra filas (columnas), el determinante no varía.

Ejemplo 2.14 Consideremos el determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Si a la segunda fila le restamos el doble de la primera, el determinante no varía:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Si ahora a la tercera fila le sumamos la primera:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

Observemos que esta propiedad nos permite obtener elementos que sean ceros sin que se altere el valor del determinante.

Como hemos comentado, podemos simplificar los cálculos aplicando las propiedades de los determinantes. Así, podemos hacer que aparezcan más ceros en una determinada fila o columna mediante la propiedad 7 o, como en el ejemplo (2.9), ver que un determinante es 0 por tener dos columnas iguales.

Ejemplo 2.15 Calcula el determinante de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución. El método consiste en transformar en 0 todos los elementos de una fila o columna excepto uno. La fila o columna que debemos elegir es aquélla que, conteniendo un 1 ó -1, contenga más elementos nulos (en el caso de que en la matriz no hubiera ningún 1 ni ningún -1, deberíamos sumarle a alguna fila o columna un múltiplo de otra para conseguirlo, pues facilita mucho los cálculos posteriores).

Para calcular el determinante de la matriz dada nos fijamos, por ejemplo en que en la primer fila hay un -1 y también un cero. Nuestro objetivo es conseguir transformar en 0 el elemento $a_{11} = 2$ y el elemento $a_{13} = 5$. Aplicaremos la propiedad 7 trabajando con columnas. Nuestra columna de referencia es la segunda, que dejamos intacta. Ahora, a la primera columna le sumamos el doble de la segunda; a la tercera columna le sumamos 5 veces la segunda y la cuarta columna la dejamos igual ya que el elemento a_{14} ya era un cero, de este modo obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 11 & -2 \\ -3 & -2 & -10 & 4 \\ -4 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix}$$

Si ahora desarrollamos este último determinante por la primera fila:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 11 & -2 \\ -3 & -2 & -10 & 4 \\ -4 & -2 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 11 & -2 \\ -3 & -10 & 4 \\ -4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Por tanto, $\det(A) = -1$. ▲

2.3. INVERSA DE UNA MATRIZ

Definición 2.11 Se dice que una matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es *regular* si existe una matriz $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ tal que:

$$AB = BA = I_n$$

A dicha matriz B se le llama *matriz inversa* de A y se denota A^{-1}.

Proposición 2 *Una matriz $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ es regular si y sólo si* $\det(A) \neq 0$. *Y en este caso:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Adj(A)^t$$

donde $Adj(A)$, es la matriz formada por los adjuntos de los elementos de A, es decir $Adj(A) = (A_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

Ejemplo 2.16 Calcula la inversa de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$

Solución. Calculamos primero el determinante para ver si es regular:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 14 - 30 = -49.$$

Calculamos los adjuntos de cada elemento:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -19 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 15 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 21$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = -10 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -5 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

Luego tenemos que:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -19 & 15 & 21 \\ -10 & -5 & -7 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

y la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{-49} \begin{pmatrix} -19 & 15 & 21 \\ -10 & -5 & -7 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{19}{49} & \frac{10}{49} & \frac{4}{49} \\ \frac{-15}{49} & \frac{5}{49} & \frac{2}{49} \\ \frac{-3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}. \blacktriangle$$

Ejercicio 2.6 Comprueba que $AA^{-1} = I_3$ con las matrices del ejemplo anterior.

2.4. RANGO DE UNA MATRIZ

Definición 2.12 Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se llama *submatriz de* A a cualquier matriz obtenida de A eliminando filas y columnas completas.

Observemos que para obtener submatriz de orden $r \times s$ podemos elegir r filas y s columnas de la matriz A y considerar aquellos elementos a_{ij} que pertenecen a la vez a cada una de las r filas y s columnas elegidas.

Definición 2.13 Dada una matriz $A \in \mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se llama *menor de orden* p al determinante de una submatriz de A de dimensión p.

Ejemplo 2.17 Las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ son submatrices de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, no lo es la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$\det(B)$ y $\det(C)$ son menores de orden 3 y orden 2, respectivamente, de la matriz A.

Ejercicio 2.7 Para cada una de las submatrices del ejemplo anterior, indica qué filas y columnas se han suprimido de la matriz A para obtenerlas. ¿Por qué no es E submatriz de A?

Ejercicio 2.8 ¿Cuántos menores de orden tres hay en A? Calcúlalos.

Definición 2.14 Se llama *rango* de una matriz al orden (dimensión) del mayor menor no nulo contenido en dicha matriz y se representa por $rg(A)$.

Si, mediante operaciones elementales de filas y columnas, hacemos ceros bajo la diagonal principal de una matriz, es decir, triangularizamos la matriz, el rango es el número de filas no nulas que quedan.

Este proceso se llama triangularizar la matriz y las operaciones elementales consisten en intercambiar dos filas (o dos columnas), multiplicar una fila (o columna) por un escalar no nulo y sumar a una fila (o columna) un múltiplo de otra.

Proposición 3 *Si mediante operaciones elementales transformamos una matriz A en otra matriz B, entonces las dos tienen el mismo rango.*

Ejemplo 2.18 Calcula el rango de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En el paso (I), buscamos convertir en 0 los elementos de la primera columna que están bajo el $a_{11} = 1$, para ello a la segunda fila le hemos restado el doble de la primera y a la tercera fila le hemos restado 4 veces la primera. En el paso (II), buscamos convertir en 0 los elemento de la segunda columna que están bajo el $a_{22} = 5$, en este caso sólo es un elemento y para ello a la tercera fila le hemos restado la segunda. Observa que el elemento que utilizamos de referencia o pivote va bajando de fila en cada paso.

Una vez triangularizada la matriz, vemos que el rango es 2 ya que la última fila está formada por ceros y quedan dos filas no nulas. ▲

Ejemplo 2.19 Calcula el rango de la siguiente matriz en función del parámetro a :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución.

Primero triangularizamos la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{I} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & -2a & 2 \\ 0 & 1-3a & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2a \\ 0 & -2 & 1-3a \end{pmatrix} \xrightarrow{III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & 2 & -2a \\ 0 & 0 & 1-5a \end{pmatrix}$$

En el paso (I), buscamos convertir en 0 los elementos de la primera columna que están bajo el $a_{11} = 1$, para ello a la segunda fila le hemos restado el doble de la primera y a la tercera fila le hemos restado 3 veces la primera. En el paso (II), hemos intercambiado las columnas segunda y tercera para que el elemento que ahora será el pivote; es decir, el que está en la posición a_{22} no dependa del parámetro. Ahora, en el paso (III) a la tercera fila le sumamos la segunda.

Distinguimos ahora los casos que se producen en el rango dependiendo del valor que tome el parámetro a. Así, vemos que si $1-5a = 0$, entonces el rango es 2, pero si $1-5a \neq 0$, entonces el rango es 3. Es decir:

$$\text{-Si } a = \frac{1}{5} \rightarrow rg(A) = 2$$
$$\text{-Si } a \neq \frac{1}{5} \rightarrow rg(A) = 3. \blacktriangle$$

2.5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definición 2.15 *Diremos que una ecuación es lineal respecto de las incógnitas* $x_1, ..., x_n$ *si tiene la forma:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b, \qquad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, ...n$$

Definición 2.16 *Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_n$ *y su expresión es:*

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\}$$

Matricialmente podemos expresarlo de la forma:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A\in\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X\in\mathfrak{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{B\in\mathfrak{M}_{m\times 1}(\mathbb{R})} \tag{2.1}$$

Entonces, podemos escribir el sistema de la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes del sistema, X es la matriz de las incógnitas y B es la matriz de los términos independientes.

Definición 2.17 Dado un sistema $AX = B$, se dice que es *homogéneo* si la matriz B está formada por ceros. En caso contrario diremos que es *no homogéneo.*

Definición 2.18 Se llama *solución* del sistema (2.1) a un conjunto de n valores $s_1, s_2, ..., s_n$ que satisfacen las m ecuaciones a la vez, es decir, se verifica que:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}s_1 + a_{12}s_2 + ... + a_{1n}s_n = b_1 \\ a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + ... + a_{2n}s_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}s_1 + a_{m2}s_2 + ... + a_{mn}s_n = b_m \end{array}\right\}$$

Ejemplo 2.20 Un fabricante produce escritorios y estanterías. Los escritorios requieren un tiempo de 5 horas para cortar y 10 horas para ensamblar las piezas. Las estanterías requieren 15 minutos para cortar y una hora para ensamblar. Cada día el fabricante tiene disponibles 200 horas de tiempo de personal para cortar y 500 horas para ensamblar. ¿Cuántos escritorios y estanterías se pueden fabricar cada día usando toda la potencia de trabajo disponible?

Solución. Sea x la cantidad de escritorios que se fabrican y sea y la de estanterías. Se nos plantea entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 5x + \frac{1}{4}y = 200 \\ 10x + y = 500 \end{array}\right\}$$

La solución estará formada por los valores de x e y que verifiquen ambas ecuaciones a la vez. Así, si despejamos y de la segunda ecuación tenemos que $y = 500 - 10x$. Sustituyendo en la primera se tiene:

$$5x + \frac{1}{4}(500 - 10x) = 200 \rightarrow 10x = 300 \rightarrow x = 30$$

y por tanto

$$y = 500 - 10x = 500 - 300 = 200$$

Luego la solución es: 30 escritorios y 200 estanterías.▲

Ejemplo 2.21 El conjunto de valores $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$ es una solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ -x & + & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & & & = & 2 \end{array}\right\}$$

el conjunto de valores $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ es una solución de este sistema. El conjunto de valores $x = -1$, $y = 3$, $z = 1$ es otra solución de este sistema. Vemos que siempre que $z = 1$ y los valores de x e y verifiquen que $x + y = 2$, tendremos una solución. Por tanto, este sistema tiene infinitas soluciones.

c) Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right\}$$

no encontramos valores de x e y que verifiquen las dos ecuaciones a la vez, es decir, este sistema no tiene solución.

2.5.1. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de ecuaciones lineales se llama:

- *sistema incompatible*, si no admite solución.
- *sistema compatible*, si admite solución. En este caso distinguiremos entre:
  - *sistema compatible determinado,* si tiene una única solución.
  - *sistema compatible indeterminado,* si tiene infinitas soluciones.

Observemos que los sistemas homogéneos siempre son compatibles ya que admiten siempre la solución $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, llamada solución trivial.

Teorema 8 (de Rouché-Frobenius) *Sea $AX = B$ un sistema de m ecuaciones y n incógnitas de la forma (2.1) y sea $(A|B)$ la matriz de dimensión $m \times (n+1)$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

llamada matriz ampliada. Entonces:

- *Si $rg(A) \neq rg\,(A|B)$ el sistema es incompatible.*
- *Si $rg(A) = rg\,(A|B)$ el sistema es compatible. Y además:*
  - *Si $rg(A) = rg\,(A|B) = n$ el sistema es compatible determinado.*
  - *Si $rg(A) = rg\,(A|B) < n$ el sistema es compatible indeterminado.*

Ejemplo 2.22 Clasifica los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ -x & & & + & 4z & = & -3 \\ & & 2y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 8 \end{array}\right\}$$

c)

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 4 \\ -2x & + & y & - & z & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución. Calculemos en cada caso el rango de la matriz de coeficientes y el de la matriz ampliada:

a)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 \neq rg\,(A|B) = 3$, por tanto es un sistema incompatible.

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & -8 & 4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rg(A) = 2 = rg\,(A\,|B\,) < 3$, por tanto es un sistema compatible indeterminado.

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 9 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -6 \end{array}\right)$$

$rg(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3$, por tanto es un sistema compatible determinado.▲

2.5.2. Resolución de sistemas

El Método de Gauss

Definición 2.19 Dos sistemas de ecuaciones lineales se dice que son *equivalentes* si tienen las mismas soluciones.

Propiedad 3 *Si en un sistema de ecuaciones lineales se suprime o añade una ecuación que es combinación lineal de las demás, el sistema resultante es equivalente.*

Propiedad 4 *Si en un sistema de ecuaciones lineales realizamos operaciones elementales entre dos filas, el sistema resultante es equivalente al primero.*

El Método de Gauss consiste en realizar operaciones elementales hasta triangularizar el sistema, es decir, hasta que la matriz ampliada tenga ceros bajo la diagonal principal. En ese caso podremos conocer el rango de la matriz de coeficientes y el de la ampliada, a la vez que despejar las soluciones cuando existan.

Ejemplo 2.23 Resuelve, mediante el método de Gauss, el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & -2 \\ 2x & + & 5y & + & 4z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & 4 \end{array}\right\}$$

Solución.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & -5 & 1 & 8 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 11 & 33 \end{array}\right)$$

En el paso (I) a la segunda fila le hemos restado el doble de la primera, y a la tercera fila le hemos restado el doble de la primera. En el paso (II) a la tercera fila le hemos sumado la segunda fila multiplicada por 5.

Podemos observar que $rg(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3 =$ n^o de incógnitas, por tanto es un sistema compatible determinado. Y además,de la última fila obtemos que

$$11z = 33 \rightarrow z = 3$$

Con este valor de z, de la segunda fila obtenemos que

$$y + 2 \cdot 3 = 5 \rightarrow y = -1$$

Finalmente, de la primera fila obtendremos el valor de x :

$$x + 2(-1) + 3 = -2 \rightarrow x = -3.\blacktriangle$$

También se pueden estudiar los diferentes casos que se dan cuando aparecen parámetros en el sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo 2.24 Discute, en función del parámetro a, la compatibilidad del siguiente sistema y resuélvelo cuando sea posible.

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 3y & + & az & = & 1 \\ -2x & + & 5y & & & = & 1 \\ -3x & + & 7y & + & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

Solución. Aplicando el método de Gauss se tiene:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & a & 1 \\ -2 & 5 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2a & 3 \\ 0 & -2 & 1+3a & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & a & 1 \\ 0 & -1 & 2a & 3 \\ 0 & 0 & 1-a & -1 \end{array}\right)$$

En el paso (I) a la segunda fila le hemos sumado el doble de la primera, y a la tercera fila le hemos sumado el triple de la primera. En el paso (II) a la tercera fila le hemos restado el doble de la segunda.

Observando la última fila vemos que si $1 - a \neq 0$, entonces $rg(A) = 3$. Luego los casos que obtenemos son:

- Si $a \neq 1 \rightarrow rg(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3$: sistema compatible determinado.

  Para buscar la solución, en la última fila tenemos :

$$(1 - a)z = -1$$

por tanto, podemos despejar z :

$$z = \frac{-1}{1-a} \to z = \frac{1}{a-1}$$

De la segunda fila y teniendo en cuenta el valor obtenido para z, tenemos:

$$-y + 2a\left(\frac{1}{a-1}\right) = 3$$

por tanto, podemos despejar y :

$$-y = 3 - \left(\frac{2a}{a-1}\right) \to y = \frac{3-a}{a-1}$$

Finalmente, de la primera fila y sustituyendo los valores de y y de z, tenemos:

$$x - 3\left(\frac{3-a}{a-1}\right) + a\left(\frac{1}{a-1}\right) = 1$$

de donde despejamos x :

$$x = \frac{8-3a}{a-1}$$

Por tanto la solución única que se tiene en este caso es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{8-3a}{a-1} \\ y = \frac{3-a}{a-1} \\ z = \frac{1}{a-1} \end{array} \right.$$

- Si $a = 1 \to rg(A) = 2 < rg\,(A\,|B\,) = 3$: el sistema es incompatible y no hay solución.▲

Ejemplo 2.25 Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} 2x & & & + & z & = & 8 \\ x & - & 2y & + & k\,z & = & k+10 \\ x & + & k\,y & - & z & = & -4 \end{array} \right\}$$

clasifícalo según los valores del parámetro k

Solución. Aplicamos el método de Gauss. Para facilitar los cálculos, ponemos la última ecuación en primer lugar, así tenemos un 1 en la posición a_{11}:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & k & k+10 \end{array} \right) \underrightarrow{\text{I}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & k & -1 & -4 \\ 0 & -2k & 3 & 16 \\ 0 & -2-k & k+1 & k+14 \end{array} \right) \underrightarrow{\text{II}}$$

$$\underrightarrow{\text{III}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & k & -4 \\ 0 & 3 & -2k & 16 \\ 0 & k+1 & -2-k & k+14 \end{array} \right) \underrightarrow{\text{IV}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & k & -4 \\ 0 & 3 & -2k & 16 \\ 0 & 0 & 2k^2-k-6 & -13k+26 \end{array} \right)$$

En el paso (III) hemos intercambiado las columnas segunda y tercera para evitar el parámetro en la posición a_{22} que vamos a utilizar de pivote. Este cambio implica que la segunda columna corresponde a los coeficientes de la incógnita z y la tercera columna a los de la y. En el paso (IV), para conseguir un 0 en el elemento a_{32} tenemos que multiplicar la tercera fila por 3 y restarle la segunda fila multiplicada por $(k+1)$; así, en la posición a_{33} nos queda

$$3(-2-k)-(-2k)(k+1)=2k^2-k-6$$

y en la posición a_{34} queda

$$3(k+14)-16(k+1)=-13k+26$$

Consideremos ahora la última fila y calculemos los valores de k que hacen que $2k^2-k-6$ tome el valor 0 :

$$2k^2-k-6=0 \leftrightarrow k=2 \text{ ó } k=-3/2$$

Distinguimos, por tanto, los siguientes casos:

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -3/2 \rightarrow rg(A)=3=rg(A\,|B\,)=$n^o de incógnitas, por tanto es un sistema compatible determinado.
- Si $k=2$, sustituyendo se tiene el sistema triangularizado

  $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  luego $rg(A)=2=rg(A\,|B\,)<$ n^o de incógnitas, por tanto es un sistema compatible indeterminado.
- Si $k=-3/2$, se tiene el sistema triangularizado

  $$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -3/2 & -4 \\ 0 & 3 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{91}{2} \end{array}\right)$$

  luego $rg(A)=2 \neq rg(A\,|B\,)=3$, por tanto es un sistema incompatible.▲

La regla de Cramer

Sea $AX=B$ un sistema compatible determinado con A matriz de dimensión n regular:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{i)}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}$$

Es decir, para calcular el valor de cualquier incógnita efectuamos un cociente de determinantes. En el denominador de todas ellas, el determinante de la matriz de los coeficientes del sistema. En el numerador, el mismo determinante que en el denominador en el que substituye la columna correspondiente a la incógnita que deseamos calcular por la columna de términos independientes.

Ejemplo 2.26 Resuelve el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 3x & + & y & - & 5z & = & 0 \\ 2x & - & y & & & = & -3 \end{array}\right\}$$

Solución.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Luego $rg(A) = rg\,(A\,|B\,) = 3$, por tanto es un sistema compatible determinado. Entonces:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-14}{-5} = \frac{14}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-43}{-5} = \frac{43}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-17}{-5} = \frac{17}{5}. \blacktriangle$$

La regla de Cramer también se puede aplicar a sistemas compatibles indeterminados, despejando unas variables en función de otras. En particular, si $rg(A) = rg\,(A\,|B\,) = r < n$, despejaremos r incógnitas en función de las $n - r$ restantes.

Para ello, siempre tendremos que pasar a la derecha $n - r$ incógnitas. La única precaución que debemos observar es que al pasarlas, la matriz del sistema resultante sea una matriz regular; es decir, con determinante no nulo.

Ejemplo 2.27 Resuelve el sistema del ejemplo *(2.22b)*:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ x & - & y & + & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & z & = & 8 \end{array}\right\}$$

Solución. Al diagonalizar el sistema se obtiene que $rg(A)=2=rg\,(A\,|B\,)<3$, debido a que la última fila de la matriz ampliada se reduce a ceros. Esto implica que el sistema es equivalente al sistema formado por las dos primeras ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-z=4 \\ x-y+z=2 \end{array}\right\}$$

Para aplicar Cramer, si queremos despejar dos incógnitas en función de una tercera, pasamos ésta a la derecha. Por ejemplo, pasemos la z:

$$\left.\begin{array}{r} x+3y=4+z \\ x-y=2-z \end{array}\right\}$$

Aplicando ahora Cramer se tiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4+z & 3 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2z-10}{-4} = \frac{5-z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4+z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-2z-2}{-4} = \frac{z+1}{2}$$

Luego las infinitas soluciones del sistema vienen dadas por:

$$x = \frac{5-z}{2}, \quad y = \frac{z+1}{2}, \quad z = z, \qquad \forall z \in \mathbb{R}.\blacktriangle$$

Bibliografía

[1] ALEGRE, P. Y OTROS (1990): *Ejercicios resueltos de Matemáticas Empresariales.* Ed. AC.

[2] BARREDA, M. I ALTRES (1998): *Problemes de càlcul amb aplicacions a l'economia.* Publicacions de la Universitat Jaume I, Castelló.

[3] BLANCO, S., GARCIA, P., DEL POZO, E. (2003): *Matemáticas Empresariales I. vol 1. Álgebra lineal.* Ed. AC Thomson, Madrid.

[4] BLANCO, S., GARCIA, P., DEL POZO, E. (2003): *Matemáticas Empresariales I. vol 2. Cálculo Diferencial.* Ed. AC Thomson, Madrid.

[5] CAMARA SANCHEZ, A. Y OTROS (2003): *Problemas resueltos de Matemáticas para Economía y Empresa.* Ed. AC Thomson.

[6] CASANY, J., CASTELLO, J., PLAZA, F. (1992): *Sistemas de ecuaciones lineales.* Ed. Nau Llibres, València.

[7] DE BURGOS, J. (2000): *Cálculo infinitesimal de una variable.* McGraw Hill, Madrid.

[8] SYDSAETER, K., HAMMOND, P. (1996): *Matemáticas para el Análisis Económico.* Prentice Hall, Madrid.